This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

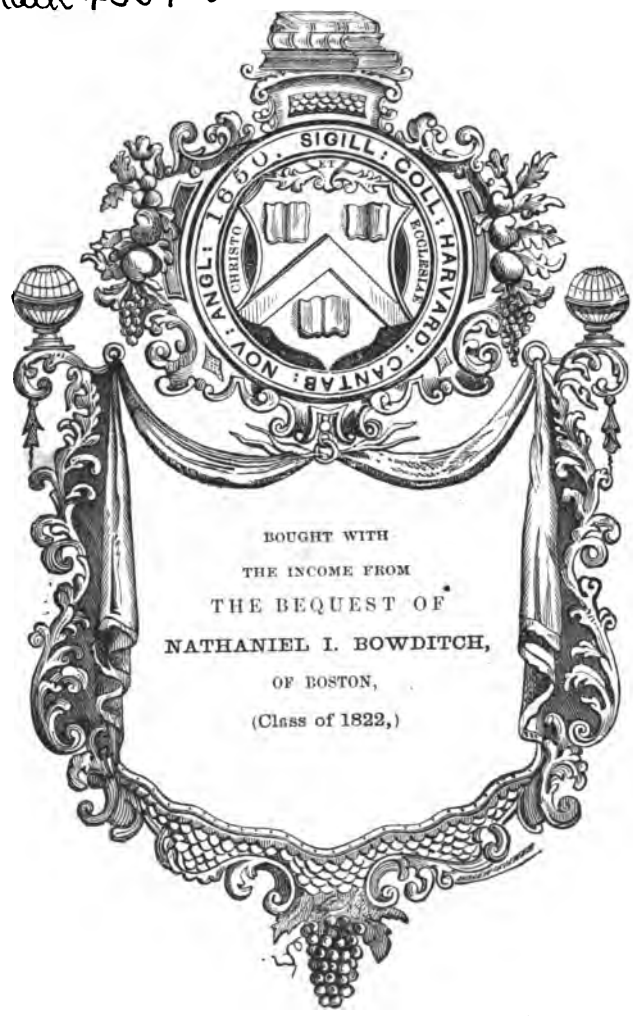
Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY

SCIENCE CENTER LIBRARY

Math 4509.00



BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
NATHANIEL I. BOWDITCH,
OF BOSTON,
(Class of 1822,)

CABOT SCIENCE LIBRARY

UEBER

DIE GEODÄTISCHE LINIE DER MANNIGFALTIGKEIT

$$ds^2 = dx^2 + \sin^2 x\, dy^2 + dz^2.$$

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

EINER HOHEN

NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER

EBERHARD-KARL-UNIVERSITÄT TÜBINGEN

VORGELEGT VON

SCHUYLER COLFAX DAVISSON
AUS BLOOMINGTON IND. U.S.A.

TÜBINGEN, 1900
DRUCK VON H. LAUPP JR.

Math 4509.00

HARVARD COLLEGE
NOV 7 1902
LIBRARY.

Bowditch fund.

Von der Fakultät angenommen

den 8. März 1900.

Inhalt.

	Seite
Einleitung	5
§ 1. Gleichungen der geodätischen Linie	7
§ 2. Bedeutung der Constanten	8
§ 3. Geodätische Flächen	9
§ 4. Einführung von neuen Coordinaten	11
§ 5. Das Gebiet der geodätischen Linie und Verlauf dieser Linie	14
§ 6. Die geodätische Linie als geodätische Linie eines Raumes, der in einer ebenen vierdimensionalen Mannigfaltigkeit enthalten ist	18

Einleitung.

Vom Standpunkt der Lie'schen Transformations-Theorie aus haben bekanntlich diejenigen Flächen ein besonderes Interesse, die eine Gruppe von Bewegungen in sich zulassen: die auf Rotationsflächen abwickelbaren und diejenigen, die constantes Krümmungsmass besitzen.

Ebenso erhebt sich für Mannigfaltigkeiten von drei Dimensionen die Frage nach der Form des Quadrats des Linienelements ds, wenn gewisse Gruppen von Bewegungen gestattet sind. Mit dieser Frage hat sich Herr Bianchi in seiner schönen Abhandlung: Spazî a tre dimensioni che amettono un gruppo continuo di movimenti beschäftigt, wo man von diesem Standpunkt aus die dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten classificiert findet.

Er zeigte unter anderen, dass für diejenigen Räume, welche eine intransitive Gruppe G_3 von Bewegungen zulassen, ds^2 eine der drei Formen annimmt:

$$ds^2 = (dx^2 + dy^2)\ \varphi^2(x) + dz^2$$
$$ds^2 = (dx^2 + \sin^2 x dy^2)\ \varphi^2(x) + dz^2$$
$$ds^2 = (dx^2 + e^{2x} dy^2)\ \varphi^2(x) + dz^2.$$

Für den speziellen Fall $\varphi(x) = 1$ geht das erste Linienelement in das des gewöhnlichen ebenen Raumes über, die letztern beiden in die von Räumen, die je eine transitive Gruppe G_4 zulassen. Wir beschäftigen uns im Folgenden mit der einen dieser letzteren Mannigfaltigkeiten, nämlich mit der dreifachen Mannigfaltigkeit, die durch das Linienelement

$$\text{(A)} \qquad ds^2 = dx^2 + \sin^2 x\ dy^2 + dz^2$$

dargestellt ist, und die nach Bianchi die folgende Gruppe G_4 von Bewegungen gestattet:

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial y};\ X_2 f = \cos y \frac{\partial f}{\partial x} - \cot x \sin y \frac{\partial f}{\partial y}$$
$$X_3 f = \sin y \frac{\partial f}{\partial x} + \cot x \cos y \frac{\partial f}{\partial y};\ X_4 f = \frac{\partial f}{\partial z},$$

die also die folgenden vier infinitesimalen Transformationen zulassen

$$
\begin{array}{llll}
1) & x' = x & y' = y + \delta t & z' = z \\
2) & x' = x + \cos y\,\delta t & y' = y - \cot x \,.\, \sin y\,\delta t & z' = z \\
3) & x' = x + \sin y\,\delta t & y' = y + \cot x \,.\, \cos y\,\delta t & z' = z \\
4) & x' = x & y' = y & z' = z + \delta t.
\end{array}
$$

Versetzt man die gegebene Mannigfaltigkeit in einen ebenen vierdimensionalen Raum (§ 6 unten), so bedeuten die ersten drei Transformationen Drehungen, die ein ∞^1 coaxiales System von Kugeln, jede in sich, überführen; die letzte eine Verschiebung, die die Kugeln in einander überführt. Also können wir sagen, dass in dieser Mannigfaltigkeit durch eine oder mehrere von diesen Bewegungen jeder Punkt an die Stelle jedes andern gebracht werden kann.

Durch eine von Herrn Banal[1]) angegebene Transformation kann das Linienelement (A) in das einer Mannigfaltigkeit:

$$ds^2 = f(u^2 + v^2 + w^2) \,.\, (du^2 + dv^2 + dw^2),$$

die neuerdings Herr Buchholz[2]) eingehend untersucht hat, übergeführt werden. Wir werden unten sehen (§ 4), dass hierdurch unsere Mannigfaltigkeit in ähnlicher Weise spezialisirt wird, wie wenn man die allgemeine auf eine Rotationsfläche abwickelbare Fläche durch diese ersetzt: es fallen nämlich dann vorher getrennte Flächenpunkte an jeder Stelle in unendlicher Anzahl zusammen.

Wir beschäftigen uns im Folgenden mit dem Verlauf und den Eigenschaften der geodätischen Linie unserer Mannigfaltigkeit und mit ihren Beziehungen zu den geodätischen Ebenen derselben.

---

1) Annali di matematica. S. II T. 24. p. 213.

2) Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, Bonn 1899.

§ 1. Gleichungen der geodätischen Linie.

Wir bestimmen zunächst die geodätische Linie desjenigen Raumes, für den das Quadrat des Linienelements ist

$$1) \qquad ds^2 = dx^2 + \sin^2 x \, dy^2 + dz^2.$$

Die Flächen dieses Raumes, für die x, y, z je constant sind, bilden ein dreifach orthogonales System.

Die Flächen $z = \text{const.}$ sind auf die Kugel mit dem Radius Eins abwickelbar, weil auf einer solchen Fläche, wenn x die Poldistanz, y die geographische Länge eines Punktes auf der Kugel ist, das Quadrat des Linienelements, für $z = \text{const.}$, die obige Form annimmt. Die Flächen, für die x oder y gleich Constanten sind, sind auf die Ebene abwickelbar.

Die Differential-Gleichungen der geodätischen Linie des betrachteten Raumes findet man nach den Regeln der Variationsrechnung. Sie sind:

$$2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = \sqrt{a^2 - b^2/\sin^2 x} \\ \dfrac{dy}{ds} = \dfrac{b}{\sin^2 x} \\ \dfrac{dz}{ds} = \sqrt{1 - a^2}, \end{cases}$$

wo a und b Integrations-Constanten sind, und wo s die Länge der geodätischen Linie ist von einem gegebenen Punkt dieser Linie an gerechnet. Zunächst ergiebt die Integration, die man ausführen muss, um die Gleichungen 2) zu bekommen, drei Constanten. Erinnert man sich aber an die Gleichung für das Quadrat des Linienelements, so sieht man, dass zwischen diesen eine Relation besteht, und daher blos zwei von ihnen willkürlich sind. Integrieren wir noch einmal, so bekommen wir die Gleichungen der geodätischen Linie in endlicher Form, nämlich

$$3)\quad \begin{cases} \cos x = \sqrt{\dfrac{a^2 - b^2}{a^2}}\ \sin a\,(s - s_0) \\ \tan(y - y_0) = \dfrac{b}{a}\ \tan a\,(s - s^0)\ . \\ z - z_0 = (s - s_0)\ \sqrt{1 - a^2}, \end{cases}$$

wo y_0 z_0 s_0 Integrations-Constanten sind.

Nehmen wir einen gegebenen Punkt als Anfangspunkt der geodätischen Linie an, d. h. einen Punkt, von dem s an gerechnet wird, so sind hierdurch diese drei Constanten bestimmt. Weil die Fläche $x = \pi/2$ von jeder geodätischen Linie geschnitten wird, so rechnen wir s von einem Punkt dieser Fläche an. Dann gehört zu $x = \pi/2$, $s = s_0 = 0$. Nimmt man weiter an, dass in diesem Schnittpunkt $y = y_0$ $z = z_0$ sei, und setzt $b/a = \cos\beta$, so erhält man statt der Gleichungen 3) die folgenden:

$$4)\quad \begin{cases} \cos x = \sin\beta \sin as \\ \tan(y - y_0) = \cos\beta\ \tan as \\ z - z_0 = s\ \sqrt{1 - a^2} \end{cases}$$

Diese Gleichungen enthalten vier willkürliche Constanten, a, β, y_0, z_0 und sind daher die allgemeinsten Gleichungen der geodätischen Linie.

§ 2. Bedeutung der Constanten a und β.

Bezeichnen wir für einen Punkt (x, y, z) mit $(ds\ dx)$ $(ds\ dy)$ $(ds\ dz)$ die Winkel zwischen einem Element ds der geodätischen Linie und den Tangenten des orthogonalen Kurven-Systems (die Richtungswinkel), so haben wir

$$1)\quad \begin{cases} \cos(ds\ dx) = a \sqrt{1 - \dfrac{\cos^2\beta}{\sin^2 x}} \\ \cos(ds\ dy) = \dfrac{a\cos\beta}{\sin^2 x} \\ \cos(ds\ dz) = \sqrt{1 - a^2}. \end{cases}$$

Also wird in dem Anfangspunkt $(\pi/2, y_0, z_0)$ der geodätischen Linie:

$$\begin{cases} \cos(ds\ dx) = a \sin\beta \\ \cos(ds\ dy) = a\cos\beta \\ \cos(ds\ dz) = \sqrt{1 - a^2}. \end{cases}$$

Die Grösse a ist also der Sinus des Winkels $(ds\, dz)$ in jedem Punkt der geodätischen Linie und kann deshalb nicht grösser als eins werden. Ferner ist in diesem Anfangspunkt $a \sin \beta$ der Cosinus des Winkels $(ds\, dx)$. Wird a gleich plus oder minus eins, so liegt das Element ds in dem durch dx und dy bestimmten Flächenelement. In diesem Fall ist aber $z = z_0$ d. h. die geodätische Linie liegt auf jener Fläche, die auf die Kugel abwickelbar ist. In dem später besonders zu betrachtenden Fall, dass $z = z_0$ eine Kugel ist, ist β der Winkel zwischen dem Linienelement der Kugel und dem grössten Kreis $x = \pi/2$, wie man sieht, wenn man annimmt, dass $z = z_0$ eine Kugel giebt, und die Gleichung 4) mit den Gleichungen der sphärischen Trigonometrie vergleicht.

§ 3. Geodätische Flächen.

Zieht man von einem gegebenen Punkt nach allen Richtungen, die orthogonal zu einer gegebenen Richtung sind, geodätische Linien, so entsteht eine „geodätische Fläche", die man wegen ihrer Entstehung als eine „Ebene" dieses Raumes auffassen kann. Sei (x_1, y_1, z_1) der Punkt, durch den diese geodätischen Linien gelegt werden, und sind die geodätischen Linien orthogonal zu der Richtung

$$\frac{dx}{ds} = \lambda$$

$$\sin x \frac{dy}{ds} = \mu$$

$$\frac{dz}{ds} = \nu,$$

so entsteht die Gleichung der geodätischen Fläche (Ebene) durch Elimination von a, β, s aus den Gleichungen

$$1) \quad \begin{cases} \lambda . a \sqrt{1 - \dfrac{\cos^2 \beta}{\sin^2 x_1}} + \mu \dfrac{a \cos \beta}{\sin x_1} + \nu \sqrt{1 - a^2} = 0 \\ \cos x = \sin \beta \sin a (s - s_1) \\ \tan (y - y_1) = \cos \beta \tan a (s - s_1) \\ z - z_1 = (s - s_1) \sqrt{1 - a^2}. \end{cases}$$

Nehmen wir als Punkt (x_1, y_1, z_1) den Punkt $(\pi/2, y_0, z_0)$, so nimmt die Gleichung der Ebene eine einfachere Form an. Wir erhalten dann als Gleichung der Ebene durch diesen Punkt

$$2)\quad \frac{\lambda \cos x + \mu \sin x \sin(y-y_0)}{\sqrt{\cos^2 x \cos^2(y-y_0) + \sin^2(y-y^0)}} + \\ + \frac{\nu\,(z-z_0)}{\text{arc sin } \sqrt{\cos^2 x \cos^2(y-y_0) + \sin^2(y-y_0)}} = 0$$

Die Gleichung einer Ebene, die noch die Punkte $(\pi/_2, 0, 0,)$ (x_2, y_2, z_2), enthält, wird alsdann:

$$3)\quad \begin{vmatrix} \frac{\cos x}{F} & \frac{\sin x \sin(y-y_0)}{F} & \frac{z-z_0}{arc\ sin\ F} \\ \frac{\cos x_2}{F_2} & \frac{\sin x_2 \sin(x_2-y_0)}{F_2} & \frac{z_2-z_0}{arc\ sin\ F_2} \\ 0 & y_0 & z_0 \end{vmatrix} = 0,$$

wo $F = \sqrt{\cos^2 x \cos^2(y-y_0) + \sin^2(y-y_0)}$. Vertauschen wir den Punkt $(\pi/_2, 0, 0)$ mit dem Anfangspunkt $(\pi/_2, y_0, z_0)$ in der vorgegebenen Entwickelung der Gleichung der geodätischen Fläche (Ebene) 3), so haben wir die Gleichung einer zweiten geodätischen Fläche durch dieselben drei Punkte gelegt, aber mit dem Punkt $(\pi/_2, 0, 0)$ als Anfangspunkt. Sie ist

$$4)\quad \begin{vmatrix} \frac{\cos x}{f} & \frac{\sin x \sin y}{f} & \frac{z}{arc\ sin\ f} \\ \frac{\cos x_2}{f} & \frac{\sin x_2 \sin y_2}{f_2} & \frac{z_2}{arc\ sin\ f_2} \\ 0 & y_0 & z_0 \end{vmatrix} = 0,$$

wo $f = \sqrt{\cos^2 x \cos^2 y + \sin^2 y}$. Obschon die beiden Ebenen, die den Gleichungen 3) und 4) entsprechen, jede durch die drei gegebenen Punkte $(\pi/_2, 0, 0)$ $(\pi/_2\ y_0\ z_0)$ $(x_2\ y_2\ z_2)$ bestimmt ist, so zeigt doch eine einfache Ueberlegung, dass sie nicht zusammenfallen. Hierdurch unterscheidet sich der hier behandelte dreidimensionale Raum von Räumen von constanter Krümmung.

Es erhebt sich die Frage, ob die Ebenen in besonderen Fällen die Eigenschaft der Ebenen unseres Raumes behalten, dass nämlich die geodätische Linie zwischen zwei Punkten der Ebene ganz in der Ebene enthalten ist. In § 6 wird diese Frage behandelt werden.

Eliminieren wir die Constanten α und β aus den Gleichungen 4) des § 1, so haben wir

$$\sin\sqrt{s^2 - (z-z_0)^2} = \sqrt{\cos^2 x \cos^2(y-y_0) + \sin^2(y-y_0)}.$$

Nehmen wir hier s als Constante an, so ist dies die Gleichung einer Kugel dieser Mannigfaltigkeit mit dem Punkt $(\pi/_2, y_0, z_0)$ als Centrum. Weil sich s in dieser Gleichung durch einen arcussinus

ausdrückt, giebt es unendlich viele verschiedene geodätische Linien zwischen den zwei Punkten ($\pi/2\, y_0\, z_0$) und (x, y, z) der Mannigfaltigkeit. In § 4 findet sich eine fernere Betrachtung dieser Thatsache.

Nach Riemann's Abhandlung: „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen", finden wir als Krümmungsmass irgend eines Flächenelements dieser Mannigfaltigkeit, das durch ds und δs bestimmt ist,

$$K = \frac{sin^2 x\,(dx\,\delta y - \delta x\,dy)^2}{sin^2 x\,[(dx\,\delta y - \delta x\,dy)^2 + (dy\,\delta z - \delta y\,dz)^2 + (dx\,\delta z - \delta x\,dz)^2}.$$

Hieraus ist zu sehen, dass das Krümmungsmass der drei Coordinaten-Ebenen xy, yz, zx, bezüglich 1, 0, 0 ist, was auch ohne Weiteres klar ist.

§ 4. Einführung von neuen Coordinaten.

Führen wir neue Coordinaten durch die Substitution

$$1) \quad \begin{cases} u = sin\, x\, cos\, y\, e^z \\ v = sin\, x\, cos\, y\, e^z \\ w = \qquad\quad e^z \end{cases}$$

ein, so nimmt das Quadrat des Linienelements die symmetrische Form[1]) an:

$$2) \qquad ds^2 = \frac{du^2 + dv^2 + dw^2}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Die so characterisirte Mannigfaltigkeit muss wenigstens zu einem Teil, mit der früher behandelten übereinstimmen. Aus den Gleichungen 1) sieht man, dass zwar jedem reellen Wertsystem $(x\, y\, z)$ ein und nur ein solches (u, v, w) entspricht: umgekehrt aber entsprechen einem $(u\, v\, w)$ doppelt unendlich viele Systeme (x, y, z), näm-

1) In seiner Vorlesung über die Krümmung der Flächen im Sommerhalbjahr 1899 hat Prof. Brill darauf hingewiesen, dass die Form des Quadrats des Linienelements $ds^2 = f(\Sigma x^2)\,\sqrt{\Sigma dx^2}$, die Dr. Buchholz in seinem Buch: Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre untersucht, dieselbe ist, die für 3 Variabele Kummer in seiner Abhandlung über atmosphärische Strahlenbrechung in Band 61 des Journals von Crelle behandelt, und hat auf die elegante Interpretation aufmerksam gemacht, welche für 3 Dimensionen die Geometrie in jenen Räumen dadurch erfährt, dass sich ihre geodätischen Linien auf die Lichtstrahlen unseres Raumes abbilden lassen, wenn dieser mit einem Medium erfüllt ist, dessen Dichte sich in concentrischen Kugelschalen nach dem Gesetz $f(\Sigma x^2)$ ändert.

lich $(x+2n\pi,\ y+2m\pi,\ z)$, wo m und n ganze Zahlen bedeuten. Durch Einführung der $u\,v\,w$ Coordinaten beschränken wir uns also auf denjenigen Fall einer $x\,y\,z$ Mannigfaltigkeit, für welche die Punkte (x, y, z) und $(x+2n\pi,\ y+2m\pi,\ z)$ zusammenfallen.

Führen wir die Substitution 1) in die Gleichungen 4) des § 1 ein, so bekommen wir als Gleichungen der geodätischen Linie in der $u\ v\ w$ Mannigfaltigkeit

$$3)\qquad \begin{cases} u = ce^{s\sqrt{1-a^2}}(\cos y_0 \cos as - \cos\beta \sin y_0 \sin as) \\ v = ce^{s\sqrt{1-a^2}}(\sin y_0 \cos as + \cos\beta \cos y_0 \sin as) \\ w = ce^{s\sqrt{1-a^2}}\sin\beta \sin as, \end{cases}$$

wo $c = e^{z_0}$ ist. Hier zeigt eine einfache Ueberlegung, dass die Constanten c und y_0 den Anfangspunkt der geodätischen Linie bestimmen und dass die Richtung derselben blos von den Constanten a und β abhängt.

Weil die geodätische Linie in einem Punkt der Fläche (Ebene) $w=0$ anfängt, nämlich in dem Punkt $(u=c.\cos y_0\ \ v=c\sin y_0)$, so können wir durch die lineare Transformation

$$3^a)\qquad \begin{aligned} u' &= \cos y_0 \,.\, u + \sin y_0 \,.\, v \\ v' &= -\sin y_0\ u + \cos\ y_0 \,.\, v \\ w' &= w, \end{aligned}$$

die, wenn man u,v,w als Coordinanten eines ebenen Raumes auffasst, einer Drehung des Coordinatensystems um die w-Axe durch den Winkel y_0 entspricht, die Gleichung 3) in die Form bringen:

$$4)\qquad \begin{cases} u' = ce^{s\sqrt{1-a^2}}\cos as \\ v' = ce^{s\sqrt{1-a^2}}\cos\beta \sin as \\ w' = ce^{s\sqrt{1-a^2}}\sin\beta \sin as \end{cases}$$

wo nun die geodätische Linie von demjenigen Punkt $u'=c$ der u'-Axe anfängt, dem der Punkt $(\pi/_2, y_0, z_0)$ der yxz-Mannigfaltigkeit entspricht. Nach einer anderen linearen Transformation:

$$4^a)\qquad \begin{aligned} u'' &= u' \\ v'' &= \cos\beta\, v' + \sin\beta \,.\, w' \\ w'' &= \sin\beta\, v' - \cos\beta\, w' = 0, \end{aligned}$$

die einer Drehung um die u'-Axe durch den Winkel β entspricht, bekommen wir noch eine einfachere Form der Gleichungen der geodätischen Linie:

$$5)\qquad \begin{cases} u'' = ce^{s\sqrt{1-a^2}} \cos as \\ v'' = ce^{s\sqrt{1-a^2}} \sin as \\ w'' = 0. \end{cases}$$

Aus dieser Form ersieht man, dass die von einem Punkt der u''-Axe ausgehende geodätische Linie immer in der Fläche

$$6)\qquad w'' = 0,$$

oder, was dasselbe ist, in der Fläche

$$6^a)\qquad u \sin y_0 \sin\beta - v \cos y_0 \sin\beta + w\cos\beta = 0$$

bleibt. In der That befriedigen die Gleichungen 3) die Gleichung $6^a)$ identisch, und daher ist sie eine ganz allgemeine Gleichung zwischen den Coordinanten jeder geodätischen Linie. Eine Fläche, die die Gleichung $6^a)$ hat, nennt Buchholz eine Nullfläche. Sie ist eine geodätische Fläche (Ebene), die die Eigenschaft der Ebenen des ebenen dreidimensionalen Raumes hat, dass nämlich die geodätische Linie zwischen zwei Punkten der Ebene ganz in der Ebene enthalten ist.

Die Gleichung der geodätischen Ebene § 3, 2) erhält durch die Substitution 1) die Form

$$7)\qquad \frac{\lambda w + \mu(uv_0 - vu_0)\sqrt{u_0^2+v_0^2}}{\sqrt{1-\frac{(uu_0+vv_0)^2(u_0^2+v_0^2)}{u^2+v^2+w^2}}} + \frac{\nu\,\frac{1}{2}lg\,\frac{u^2+v^2+w^2}{u_0^2+v_0^2}\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{arc\sin\sqrt{1-\frac{(uu_0+vv_0)^2(u_0^2+v_0^2)}{u^2+v^2+w^2}}} = 0,$$

wo der Punkt $(u_0\, v_0\, z_0)$ dem Punkt $(\pi/_2\, y_0\, z_0)$ entspricht. Setzt man noch $v_0 = 0$ und $u_0 = 1$, so nimmt die Gleichung 7) die Form an

$$\frac{\lambda w + \mu v}{\sqrt{u^2+v^2}} + \frac{\nu\,\frac{1}{2}\,log\,(u^2+v^2+w^2)}{arc\,\sin\sqrt{\frac{w^2+v^2}{u^2+v^2+w^2}}} = 0.$$

Die Gleichung einer Kugel mit dem Punkt $(u_0\, v_0\, 0)$ als Centrum nimmt die Form an:

$$\sin\sqrt{s^2-\left(\tfrac{1}{2}\,log\,\frac{u^2+v^2+w^2}{u_0^2+v_0^2}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{(uu_0+vv_0)^2(u_0^2+v_0^2)}{u^2+v^2+w^2}},$$

oder die Form

$$\sin\sqrt{s^2-(\tfrac{1}{2}\,log\,u^2+v^2+w^2)^2} = \sqrt{\frac{v^2+w^2}{u^2+v^2+w^2}},$$

wenn der Punkt $(u_0\, v_0\, 0)$ der Punkt $(1, 0, 0)$ wird. Wegen

$$du^2 + dv^2 + dw^2 = du'^2 + dv'^2 + dw'^2 = du''^2 + dv''^2 + dw''^2,$$
$$u^2 + v^2 + w^2 = u'^2 + v'^2 + w'^2 = u''^2 + v''^2 + w''^2$$

ist

$$ds^2 = \frac{du'^2 + dv'^2 + dw'^2}{u'^2 + v'^2 + w'^2} = \frac{du''^2 + dv''^2 + dw''^2}{u''^2 + v''^2 + w''^2},$$

Daher bedeuten die Transformationen 3a) 4a) Verschiebungen der Mannigfaltigkeit in sich.

§ 5. Das Gebiet der geodätischen Linie und Verlauf dieser Linie.

In dem vorigen § haben wir gesehen, dass die geodätischen Linien, für die y_0 und β dieselben Werte haben, in einer Fläche liegen, die die Gleichung

$$w'' = u \sin y_0 \sin \beta - v \cos y_0 \sin \beta + w \cos \beta = 0$$

hat.

Eliminieren wir s aus den Gleichungen 5) des vorigen §, so bekommen wir die Gleichung einer einzelnen von den geodätischen Linien in der Ebene

$$w'' = 0;$$

sie lautet:

$$1) \quad \frac{u''}{\sqrt{u''^2 + v''^2}} = \cos\left(\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \tfrac{1}{2} \log\left(\frac{u''^2 + v''^2}{c^2}\right)\right).$$

Man kann diese Gleichung in die Form bringen

$$\arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v''^2}{u''^2}}} = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \tfrac{1}{2} \log(u''^2 + v''^2) - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \log c$$

oder in die folgende:

$$2) \qquad q = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} p - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \log c,$$

wenn man

$$3) \qquad \begin{cases} p = \tfrac{1}{2} \log (u''^2 + v''^2) \\ q = \arctan \dfrac{v''}{u''} \end{cases}$$

setzt. Also nimmt das Quadrat des Linien-Elements, das für $w'' = 0$ wird

$$ds^2 = \frac{du'^2 + dv''^2}{u''^2 + v''^2},$$

die Form:

$$ds^2 = dp^2 + dq^2$$

an. Daher ist die Fläche $w'' = 0$ eine Fläche vom Krümmungsmass Null.

Die geodätischen Linien der pq-Ebene sind ihre Geraden, dargestellt durch die Gleichung 2). Lösen wir die Gleichung 3) nach u'' und v'' auf, so erhalten wir:

$$5) \qquad \begin{cases} u'' = e^p \cos q \\ v'' = e^p \sin q. \end{cases}$$

Die Gleichungen 3) und 5) vermitteln eine Abbildung der Fläche $w'' = 0$ mit den Coordinaten u'' v'' auf die pq-Ebene. Man ersieht daraus folgendes: alle Punkte, die zu positiven u'' gehören, liegen in der Abbildung zwischen parallelen geraden Linien, die die Gleichungen

$$q = (4n - 1)\,\pi/2 \text{ und } q = (4n + 1)\,\pi/2$$

haben: alle die zu positiven v'' gehören, zwischen

$$q = 2n\pi \text{ und } q = (2n + 1)\,\pi.$$

Ebenso liegen alle, für die u'' negativ ist, zwischen Linien, die die Gleichungen

$$q = (4n + 1)\,\pi/2 \text{ und } q = (4n + 3)\,\pi/2$$

haben: Punkte, für die v'' negativ ist, zwischen

$$q = (2n + 1)\,\pi \text{ und } q = (2n + 2)\,\pi,$$

wo immer n eine ganze Zahl bedeutet. Die Punkte $(+u'', +v'')$ also liegen zwischen den Linien

$$q = 4n \,.\, \pi/2 \text{ und } q = (4n + 1)\,\pi/2$$

$(+ u'', - v'')$ zwischen

$$q = (4n + 1)\,\pi/2 \text{ und } q = (4n + 2)\,\pi/2$$

$(- u'', - v'')$ zwischen

$$q = (4n + 2)\,\pi/2 \text{ und } q = (4n + 3)\,\pi/2$$

$(- u'', + v'')$ zwischen

$$q = (4n + 3)\,\pi/2 \text{ und } q = (4n + 4)\,\pi/2.$$

Also gehören zu einem gegebenen Punkt der $u''v''$-Ebene unendlich viele Punkte der pq-Ebene, die durch eine Aufrollung der pq-Ebene auf einen Kreiscylinder mit dem Radius Eins auf einander gebracht werden können. Die Gestalt aller Kurven, für die u'' constant ist, ist dieselbe, weil durch eine Verschiebung in der Richtung der p-Axe jede Kurve in eine andere übergeht.

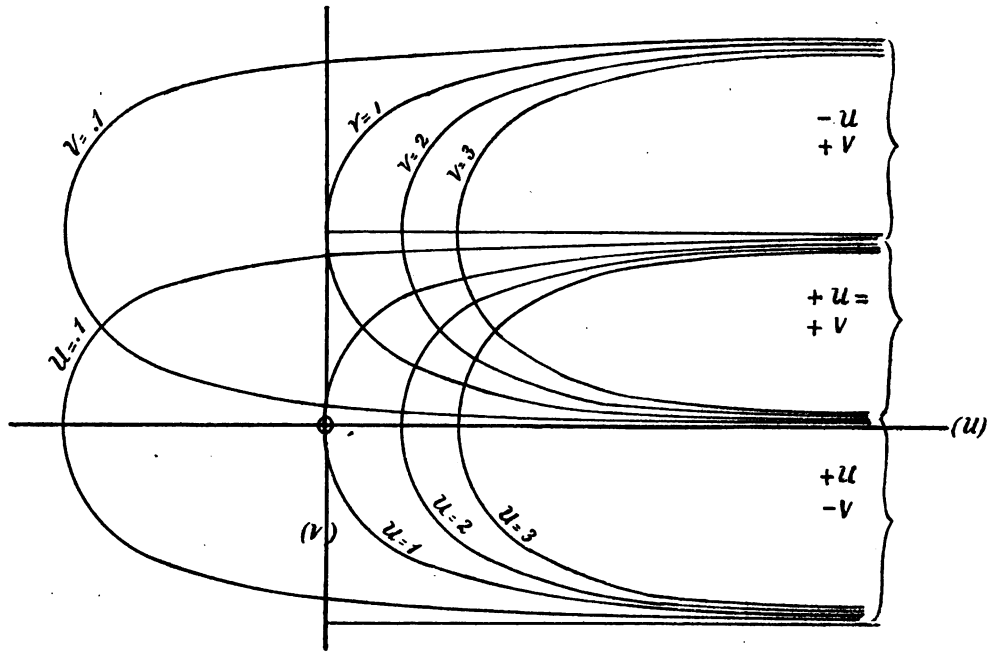


Fig. 1.

Auch sieht man aus der Gleichung 5), dass durch eine Verschiebung der u''-Kurven in der Richtung der q-Axe um die Länge $(2n+1)\pi/_2$ die entsprechenden v''-Kurven entstehen, d. h. die Kurve $u''=\varkappa$ in die Kurve $v''=\varkappa$ übergeht. In der Abbildung stehen die u'' und v'' Kurven orthogonal, wie die Form des Quadrates des Linienelements lehrt. Deuten wir aber umgekehrt $u''\,v''$ als rechtwinklige und geradlinige Coordinaten, und bilden wir die pq-Ebene auf der $u''\,v''$-Ebene ab, so gehen die zu der q-Axe parallel laufenden Linien in Kreise mit dem Punkt (0,0) als Centrum über, die Linien parallel der p-Axe in gerade Linien durch den Nullpunkt über. Den geraden Linien der pq-Ebene aber, die von einem Punkt $(0\,c)$ der q-Axe ausgehen, entsprechen mit zwei Ausnahmen Spirallinien, die von einem Punkt der u''-Axe auslaufen.

Die zwei Ausnahmen sind die zwei Fälle, wo die gerade Linie parallel der p-Axe ist, oder mit der q-Axe zusammenfällt. Den Spiral-Linien entspricht

$$-1 < a < 1 \qquad a \neq 0$$

und den beiden andern Fällen bezüglich

$a = 0$ und $a = 1$.

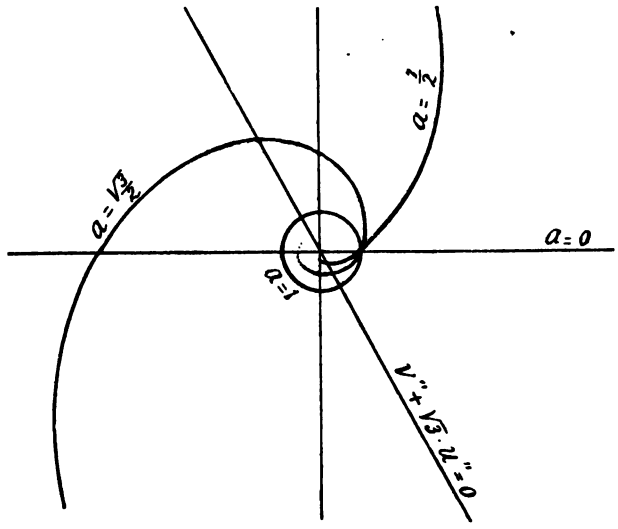


Fig. 2.

Dem Wert $a = o$ entspricht $v'' = o$ und dem $a = 1$

$$u''^2 + v''^2 = c^2.$$

Die begleitende Figur zeigt den Verlauf der geodätischen Linie in den vier Fällen, wo

$$a = o \quad a = \tfrac{1}{2} \quad a = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad a = 1 \text{ ist.}$$

Verlängern wir die Spiral-Linien vom Punkte (c, o) aus nach beiden Richtungen, so gelangen wir in einer Richtung nach unendlich vielen Windungen in den Punkt (o,o), und in der anderen Richtung in den Punkt $(\infty, \frac{2}{0})$. Nach der in der Fussnote zu Seite (§ 4) gemachten Bemerkung gibt die Figur zugleich den Verlauf eines Lichtstrahls, der im Euklidischen Raum von dem Punkt (c, o) aus durch ein Medium sich fortpflanzt, dessen Dichte nach dem Gesetz

$$\frac{const.}{r}$$

von dem Punkt (o, o) aus stetig abnimmt. Wenn wir die Abbildung bei Seite lassen und den Verlauf der geodätischen Linie analytisch untersuchen, so bekommen wir aus der Gleichung 5) des § 4

$$6) \qquad \frac{dv''}{du''} = \frac{v''\sqrt{1 - a^2} + au''}{u''\sqrt{1 - a^2} - av''}$$

eine Gleichung, die an jeder Stelle die Richtung der in der Ebene $w'' = o$

liegenden geodätischen Linie gibt. In dem Punkt (c, o), den wir als Anfangspunkt benutzt haben, ist

$$\frac{dv''}{du''} = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Für die geodätische Linie, die von diesem Punkt zu dem Punkt (u'', v'') geht, haben wir aus der Gleichung 1) die Bedingung:

$$\frac{a}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{arc\ cos \frac{u''}{\sqrt{u''^2+v''^2}}}{\frac{1}{2} log \frac{u''^2+v''^2}{c^2}}$$

Weil arcuscosinus eine vieldeutige Funktion ist, gibt es im allgemeinen unendlich viele reelle geodätische Linien zwischen zwei Punkten der behandelten Mannigfaltigkeit. Nur

$$a = \pm 1 \text{ und } a = 0$$

machen Ausnahmen.

1) Für $a = \pm 1$ erhält man

$$log \frac{u''^2 + v''^2}{c^2} = 1$$

oder

$$\frac{u''^2 + v''^2}{c^2} = e^{2k\pi i}$$

also bloss eine reelle geodätische Linie, die dem Wert $k = o$ entspricht. In der That kehren die durch $a = \pm 1$ definierten Linien in sich selbst zurück.

2) Für $a = o$ hat man aus Gleichung 1)

$$\frac{u''^2}{\sqrt{u''^2+v''^2}} = 1$$

oder $v'' = o$, und die geodätische Linie fällt mit der u''-Axe zusammen. Die beiden Verfahren lassen daher vermuten, dass die geodätische Linie der $u''v''$-Ebene und damit überhaupt alle geodätischen Linien in dieser Mannigfaltigkeit ähnlich wie die Schraubenlinien auf einem Kreiscylinder in einer ebenen 3-fachen Mannigfaltigkeit verlaufen. Dass dies der Fall ist, wird im nächsten § bewiesen.

§ 6. Die geodätische Linie als geodätische Linie eines Raumes, der in einer ebenen 4dimensionalen Mannigfaltigkeit enthalten ist.

Der durch die Gleichung 1) des § 1 charakterisierte Raum

kann, wenn auch nicht in seiner ganzen Ausdehnung, ohne Dehnung und Verkürzung in einen ebenen vier dimensionalen Raum, m_4 mit den rechtwinklichen Coordinaten X, Y, Z, W, dessen Linienelement also

$$1) \qquad ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 + dW^2$$

ist, gebracht werden, weil vermöge der Substitution

$$2) \qquad \begin{cases} X = \sin x \cos y \\ Y = \sin x \sin y \\ Z = \cos x \\ W = z \end{cases}$$

die Gleichung 1) die Form:

$$ds^2 = dx^2 + \sin^2 x\, dy^2 + dz^2$$

annimmt. Wegen der Gleichungen 2) kann man daher diese Mannigfaltigkeit, auf die wir uns im Folgenden beschränken, durch die Gleichungen

$$3) \qquad \begin{cases} ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 + dW^2 \\ 1 = X^2 + Y^2 + Z^2. \end{cases}$$

charakterisieren.

Um die Differential-Gleichungen der geodätischen Linie aus diesen Gleichungen zu finden, hat man die Funktionen X, Y, Z, W von s so zu bestimmen, dass das Integral

$$\int ds \left[\sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2 + W'^2} + \lambda (X^2 + Y^2 + Z^2 - 1)\right]$$

ein Minimum wird. Die Differential-Gleichungen lauten:

$$\frac{d^2 X^2}{ds^2} = 2\lambda X$$

$$\frac{d^2 Y}{ds^2} = 2\lambda Y$$

$$\frac{d^2 Z}{ds^2} = 2\lambda Z$$

$$\frac{d^2 W}{ds^2} = 0.$$

Daher entsteht:

$$2\lambda = X \frac{d^2 X}{ds^2} + Y \frac{d^2 Y}{ds^2} + Z \frac{d^2 Z}{ds^2}$$

$$= \left(\frac{dW}{ds}\right)^2 - 1 = -k^2,$$

und also als endliche Gleichungen

$$4) \qquad \begin{cases} X = A_1 \cos k s + B_1 \sin k s \\ Y = A_2 \cos k s + B_2 \sin k s \\ Z = A_3 \cos k s + B_3 \sin k s \\ W = s\sqrt{1 - k^2} + c_1, \end{cases}$$

wo vermöge der Gleichungen 3)

$$\Sigma A^2 = \Sigma B^2 = 1 \quad \Sigma AB = 0$$

ist. Nehmen wir als Anfangspunkt noch den Punkt $(\pi/_2, y_0, z_0)$ dann werden die Gleichungen 4)

$$\begin{aligned} X &= \cos y_0 \cos k s - \sin\alpha \sin y_0 \sin k s \\ Y &= \sin y_0 \cos k s + \sin\alpha \cos y_0 \sin k s \\ Z &= \cos\alpha \sin k s \\ W &= c e^{s\sqrt{1-a^2}} \end{aligned}$$

wo $c = e^{z_0}$ und $B_3 = \cos\alpha$.

Nach zwei aufeinander folgenden linearen Transformationen, erstens einer Drehung um die ZW-Axe durch den Winkel y_0 und zweitens einer Drehung um die $X'W$-Axe durch den Winkel a, die den zwei linearen Transformationen § 4 Seite 12 entsprechen, werden die obigen Gleichungen

$$5) \quad \begin{cases} X'' = \cos k s = x \cos y_0 + y \sin y_0 \\ Y'' = \sin k s = x \sin\alpha \sin y_0 + y \sin\alpha \cos y_0 + \cos\alpha . z \\ Z'' = 0 \qquad = x \sin y_0 - y \cos y_0 + \tan\alpha z \\ W'' = s\sqrt{1-k^2} + z_0 = w. \end{cases}$$

Eine einfache Ueberlegung zeigt, dass die Constanten k und α bezüglich dieselbe Rolle spielen wie a und β in dem vorigen § und durch dieselbe ersetzt werden können. Also haben wir (vgl. Gleichung 5 § 4)

$$6) \quad \begin{cases} X'' e^{W''} = c e^{s\sqrt{1-a^2}} \cos as = u'' \\ Y'' e^{W''} = c e^{s\sqrt{1-a^2}} \sin as = v'' \\ Z'' e^{W''} = 0 \qquad\qquad = w''. \end{cases}$$

Demnach entspricht der Fläche, auf der die von uns behandelte geodätische Linie der $w''u''v''$-Mannigfaltigkeit liegt, nämlich $w'' = o$, in der ebenen Mannigfaltigkeit m_4 eine Fläche, die durch die Gleichungen

$$7) \quad \begin{cases} X \sin y_0 - Y \cos y_0 + \cot\beta Z = 0 \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \end{cases}$$

aus der Mannigfaltigkeit m_4 ausgeschnitten ist. Durch den gegebenen Anfangspunkt geht eine ∞^1 Mannigfaltigkeit von Ebenen $w'' = o$, die den verschiedenen Werten der Constanten β entsprechen, und alle von diesem Punkt ausgehenden geodätischen Linien liegen in einer dieser Ebenen $w'' = 0$. Daher liegen alle geodätischen Linien, die von dem Punkt $(\pi/_2, y_0, z_0)$ aus gezogen werden können, auf

Kreiscylindern, deren Axen orthogonal zu der xyz-Ebene, d. h. der Ebene $w'' = 0$ sind. Auf den verschiedenen Cylindern β, die durch den Punkt $(\pi/_2, y_0, z_0)$ gehen, gibt a die Richtung der geodätischen Linien an. In dieser Weise bestimmen a und β oder a und b des § 1 die Anfangsrichtung der geodätischen Linie.

Die Gestalt dieser Linie hängt also nur von der Constante a ab und kann folgende sein.

1) Für $a = \pm 1$ erhält man $W = \text{constant}$. Also liegen die Linien in einer 3-fachen ebenen Mannigfaltigkeit und sind die Schnittlinien der zwei Flächen, die die Gleichungen 7) haben, d. h. sie sind Kreise.

2) Für $a = o$ entsteht $\frac{dW}{ds} = 1$ d. h. die Linien sind parallel der W-Axe, daher gerade Linien.

3) Für $-1 < a < 1$ $a \neq 0$ entstehen Schraubenlinien. Hierdurch findet sich das am Ende des § 5 gesagte bestätigt.

Ebenso wie im § 3 findet man als Gleichung einer geodätischen Ebene, die durch die drei Punkte $(1,0,0,0)$, $(X_1\ Y_1\ Z_1\ W_1)$, $(X_2\ Y_2\ Z_2\ W_2)$ mit dem Punkt $(1,0,0,0)$, als Anfangspunkt gelegt ist:

$$8) \quad \begin{cases} \begin{vmatrix} Y & Z & W f(X) \\ Y_1 & Z_1 & W_1 f(X_1) \\ Y_2 & Z_2 & W_2 f(X_2) \end{vmatrix} = 0 \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \end{cases}$$

wo $f(X) = \frac{\sqrt{1 - X^2}}{arc\,sin\sqrt{1 - a^2}}$. Um die Gleichung der zwischen den Punkten P_1 und P_2 gezogenen geodätischen Linie zu finden, setzen wir in der Gleichung 4) t für ks. So haben wir, wenn t_i dem Punkte P_i entspricht,

$$9) \quad \begin{cases} X_i = A_1 \cos t_i + B_1 \sin t_i \\ Y_i = A_2 \cos t_i + B_2 \sin t_i \\ Z_i = A_3 \cos t_i + B_3 \sin t_i \\ W_i = t_i \sqrt{\frac{1 - k^2}{k^2}} + z_0 \\ X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 = 1 \\ X_i X_j + Y_i Y_j + Z_i Z_j = \cos(t_i - t_j) \end{cases}$$

Uebrigens aber sind $X_i \ldots W_i$, t_i beliebige Grössen. Eliminieren wir nach einander $A_1\ B_1$, $A_2\ B_2$, $A_3\ B_3$, $k\ z_0$ aus den Gleichungen 9), dann bekommen wir für die Linie zwischen P_1 und P_2 die folgenden Gleichungen:

$$10) \quad \begin{cases} X = \dfrac{X_1 \sin(t-t_2) + X_2 \sin(t_1-t)}{\sin(t_1-t_2)} \\ Y = \dfrac{Y_1 \sin(t-t_2) + Y_2 \sin(t_1-t)}{\sin(t_1-t_2)}, \\ Z = \dfrac{Z \sin(t-t_2) + Z_2 \sin(t_1-t)}{\sin(t_1-t_2)} \\ W = \dfrac{W_1 - W_2}{t_1-t_2}\, t + \dfrac{t_1 W_2 - t_2 W_1}{t_1-t_2} \end{cases}$$

Liegt insbesondere der Punkt P unendlich nahe dem Punkt P_2, d. h. ist $t = t_2 + \delta t$, so lauten die Gleichungen 10)

$$10^a) \quad \begin{cases} X = b\delta t\, X_1 + X_2 (1 - c\delta t) \\ Y = b\delta t\, Y_1 + Y_2 (1 - c\delta t) \\ Z = b\delta t\, Z_1 + Z_2 (1 - c\delta t) \\ W = W_2 + W_1 - W_2\, g\delta t, \end{cases}$$

wo $b = \dfrac{1}{\sin(t_1-t_2)}$ $\quad c = \cot(t_1-t_2)$ $\quad g = \dfrac{1}{t_1-t_2}$.

Würde nun die geodätische Linie ganz in der Ebene 8) liegen, die zwei von ihren Punkten enthält, so müssten nach der Substitution von $10^a)$ in 8) die Coefficienten aller Potenzen von δt identisch verschwinden. Man hat aber als Coefficienten z. B. von δt: $cW_2 f(X_2) - bW_1 f(X_1) + g(W_1 - W_2) f(X_2) + W_2 (bX_1 - cX_2) f(X_2)$, ein Ausdruck, der für beliebige $W_1\ Y_1\ X_2\ W_2$ identisch verschwinden müsste, was offenbar nicht der Fall ist, und so ist die Frage auf Seite 10 beantwortet. Nur in dem besondern Fall, wo $W_1 = W_2 = 0$ ist, verschwindet dieser Ausdruck für alle X_1, X_2. Man sieht aber in diesem Fall auch ohne Rechnung, dass die geodätische Linie ganz in der Ebene enthalten ist, weil dann die Gleichungen 8) werden:

$$\begin{cases} W = 0 \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \end{cases}$$

d. h. die geodätische Ebene geht dann über in die Kugel-Fläche:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

in der selbstverständlich jede geodätische Linie des vorliegenden Raumes enthalten ist, die zwei beliebige Punkte mit ihr gemeinsam hat.

Zum Schluss sei es mir gestattet, Herrn Prof. Dr. von Brill für die Anregung zu dieser Arbeit und für die freundliche Aufmerksamkeit, welche er mir bei meinen mathematischen Studien in Tübingen geschenkt hat, meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

Math 4509.00
Ueber die geodatische linie
Cabot Science
3 2044 091 91